三条市立大学　令和５年度
工学部　技術・経営工学科
一般選抜　**中**期日程

個別学力検査

数学　解答編

令和５年３月８日　　10 時～12 時（120 分）

$\boxed{1}$ ＜解答例＞

（１）点Ｐの座標を (x, y) とする。

Ｐ点の満たす条件は$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$ であるから

$$\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$$

これより

$$\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$$

上式に$\mathrm{AP}^2=(x-2)^2+(y-7)^2,\quad \mathrm{BP}^2=(x-5)^2+(y-7)^2$ を代入すると

$$(x-2)^2+(y-7)^2=4\{(x-5)^2+(y-7)^2\}$$

整理すると

$$x^2-12x+36+y^2-14y+49-4=0$$

よって，Ｐ点の軌跡を表す方程式は

$$(x-6)^2+(y-7)^2=4$$

（２）前問（１）で求められた点Pの軌跡は円である。この円を U とし、その中心を C とする。また，求める円を V としその中心をDとする。

いま，円 V は x 軸および y 軸の両方に接するから，半径を $r\,(>0)$ とすると円 V の中心Dの座標は $\mathrm{D}\,(r, r)$ である。よって円 V の方程式は

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

また，円 U は円 V と外接するから，それらの中心間距離 CD は

$$\mathrm{CD}=r+2$$

したがって

$$\mathrm{CD}^2=(r+2)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方，三平方の定理を使えば

$$\mathrm{CD}^2=(6-r)^2+(7-r)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

よって式①，②から

$$(r+2)^2=(6-r)^2+(7-r)^2$$

これを整理すると次の r に関する二次方程式を得る。

$$r^2-30r+81=0$$

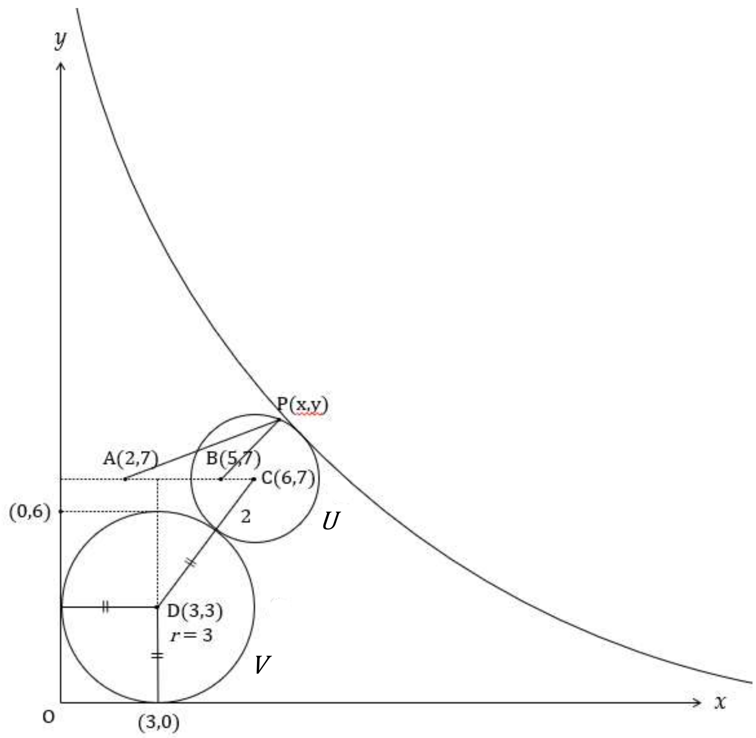
これを解いて，

$$(r-3)(r-27)=0$$

$$r=3,\quad 27$$

よって，求める円 V の方程式は，

$$(x-3)^2+(y-3)^2=3^2 \ \text{と}\ (x-27)^2+(y-27)^2=27^2$$



2　＜解答例＞

（１）任意の定数 t をパラメータとすると, 直線上の任意点 P の座標は $P(t, mt)$ で表される。いま放物線 $y=ax^2$ の頂点が直線 l 上を向きを変えずに動くときにできる放物線は，P 点を頂点とする放物線，あるいは元の放物線を x 方向に t，y 方向に mt だけ平行移動した放物線である。すなわち，

$$y = a(x-t)^2 + mt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

（２）放物線上のすべての点は直線 l と平行に移動するから，全ての放物線に共通な接線は直線 l と同じ傾きを持つ。これより，接線の方程式は次のように表すことができる。

$$y = mx + b \quad （b \text{ は未定定数}）\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

接線と放物線は共有点を持つから，式①と式②を等置して整理すると x についての二次方程式を得る。

$$ax^2 - (2at+m)x + at^2 + mt - b = 0 \quad \cdots\cdots③$$

共有点は接点の 1 つだけであるから式③は重解を持ち判別式は 0 となる。すなわち

$$(2at+m)^2 - 4a(at^2 + mt - b) = 0$$

これを b について解いて

$$b = -\frac{m^2}{4a}$$

以上から，求める接線の方程式は

$$y = mx - \frac{m^2}{4a}$$

3 ＜解答例＞

（１）コインを投げて表が出る（1 マス進む）確率および裏が出る（2 マス進む）確率はそれぞれ$\dfrac{1}{2}$である。コインを 3 回投げて上がる場合は（表の回数，裏の回数）で表すと(0, 3) の 1 通りである。よって，求める確率は裏が続けて 3 回出る確率であり積の定理より，

$$\boxed{ア}：\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

（２）コインを 5 回投げて上がるのは（表の回数，裏の回数）で表すと(4, 1) で，また 5 回のうち裏が 1 回出る出方は${}_5C_1$通り（表が 4 回出る出方は${}_5C_4$でも可）である。よって求める確率は

$$\boxed{イ}：{}_5C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$$

（３）ちょうど 1 周で上がる裏表の出方は（表の回数，裏の回数）で表すと(0, 3)，(2, 2)，(4, 1)，(6, 0) で，求める確率はそれぞれの表裏の出る出方の確率の和となるので，

$$\boxed{ウ}：\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{43}{64}$$

（４）ちょうど 2 周で上がるためには

①F で一度止まって

②裏が出て B に進み

③A まで進めばよい。

①　A から F まで（F で止まる）の裏表の出方は（表の回数，裏の回数）で表すと(2, 1)，(1, 3)，(0, 5) で，求める確率はそれぞれの表裏の出方の確率の和となるので，

$${}_3C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{32}$$

②　F から裏が出て B に進む確率は　$\dfrac{1}{2}$

③　B から A まで進む（A で止まる）確率は A から F まで（F で止まる）進む確率と同じだから，

$${}_3C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{32}$$

したがってちょうど 2 周で上がる確率は積の定理から，

$$\boxed{エ}：\frac{21}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{32}=\frac{441}{2048}$$

$\boxed{4}$ ＜解答例＞

（１）部分積分法を適用して

$$f(x)=\int_0^x (1+t)e^t dt=\Big[(1+t)e^t\Big]_0^x-\int_0^x e^t dt = xe^x$$

（２）y の１次の導関数は

$$y'=\frac{4(x-2)e^x}{x^3}$$

極値となり得る点は $y'=0$ より $x=2$ $(\because e^x\neq 0)$ が得られる。これより増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	／	$-$	0	$+$
y	↗	／	↘	e^2	↗

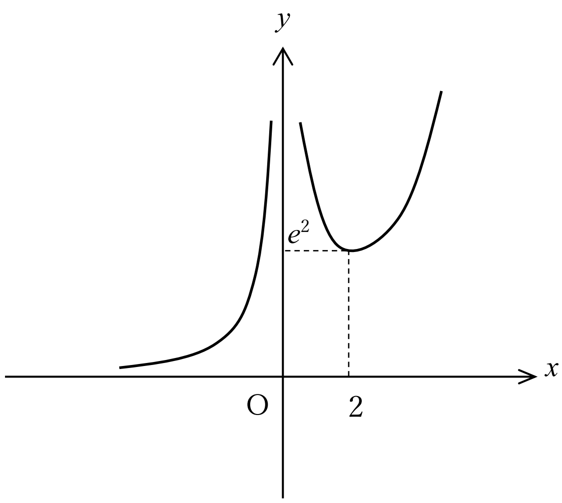
また，$x=0$ の近傍では

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{4e^x}{x^2}=\infty$$

$x\to\pm\infty$ については

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{x^2}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{x^2}=\infty$$

以上から関数のグラフは次のようになる。



（3）問（1）の結果から与方程式は

$$\frac{4e^x}{x^2}-k=0$$

となる。この方程式を $\frac{4e^x}{x^2}=k$ と変形すれば，この方程式の実数解の個数は $y=\frac{4e^x}{x^2}$ と $y=k$ の共有点の個数と同じであることが分かる。これより，問（2）のグラフから実数解の個数は次のとおりである。

$k>e^2$ のとき解は3個
$k=e^2$ のとき解は2個
$0<k<e^2$ のとき解は1個
$k\leqq 0$ のとき解は0個